粒状物質の連続体力学的考察についての方法論的コメント

東理大　理工　池　田　　恵

（ 1月 30日受理）

この論文では粒状物質，あるいは粒体（granular media）といわれているものの連続体力学的考察（continuum approach）について，その背景にあるモデルの問題や考え方自身の問題について，若干の本質的なコメントを述べてみたい。

従来より粒体の考察には particulate approach と continuum approach が存在し，前者は離散系としての振舞を各粒子毎の総和・統計によって全体系の挙動に結びつけんとするもので，いわば多体系として扱うものである。後者は各粒子のイメージを保存しつつも最初から全体系にならした連続体系として扱うもので，全体系の振舞は平均化された密度・分布函数によって記述されるものである（cf. 1））。我々も従来からのいきがかり上，continuum approach の立場にたつものであるが，各粒子の振舞の特徴も如実に反映した取扱いがなされるにこしたことはない。そのためには両者の approach の仕方を統合・統一した立場にたって，粒体粒子のモデルにそのことを採り入れていく必要がある。つまり，我々の立場では“非局所連続体力学”の一例として，粒状物質の連続体力学的考察を試みるということになる（cf. 2））。

ところで従来よりの“非局所連続体力学”では，各点のもつ内部自由度を陽にとりだして，その挙動を全体場に反映させることが考えられてきており，その内部自由度としては方向特性，相対回転，内部回転，スピン，スピノルなどがとられ，それぞれに応じた連続体力学体系が展開されてきているところであるが（cf. 3）），その際モデル的に連続体の各点のもつ内部自由度，就中，内部回転（変位による回転成分とは独立な回転）を考えるに当っては，連続体中の点（原子，分子をも含めて）の回転ということよりも，何か離散系の粒子が流動流体中で勝手に回転しているイメージの方が考え易い面がある（cf. 4））。即ち，流体と粒子の相互作用という形で考えていく方が考え易い（cf. 5））。そういうことから端を発して，我々は連続体力学を粒体系へ適用していくことを考えており，「粒状物質の連続体力学的考察」ということが種々問題になってきているところである（cf. 1），

4))。又，実用的にはむしろマクロな挙動が問題になるわけだから，どうしても continuum approach にならざるを得ないといえ，所謂粉粒体工学の側からもこの種の考察は 重要なものであるとみなされている (cf. 6))。

さて，そこで以下，我々の立場からみた粒状物質の continuum approach についての問題点を二，三のべておこうと思う。

まず第一に重要なのは， continuum approach では粒子の集合体を continuum とみなすことである。つまり，各粒子の境界で生ずる各量の不連続というものを“ならし”てしまって，全体系にわたる或る種の平均量によって系の状態を記述せんとする。そのために，各粒子が内部回転をもつと仮定されたり，各種の分布函数が導入されたりする。例えば文献 1) では volume distribution function $\nu(x, t)$ 及び mass density $\gamma(x, t)$ を導入し，これらに基づいて全体系にわたる平均操作 (全体系にわたる連続函数による記述への移行) を施し，従来通りの各種の balance eqs. を求めることが試みられている。 つまり，状態変数としてそういう分布函数が独立変数として採用され，自由エネルギーがそれらの函数になるように拡張される。そしてそれらを内部変数として扱うから，正に上述の内部自由度の役割を果していることは確かである。但し，内部回転というようなベクトル量としてではなく，あくまでスカラー函数として導入されるので，現象面にきいてくるのは pressure の order に対してのみで，方向性物体で問題になる couple-stress などの order にはきいてこない。これは明らかに想定されるモデルの違いでもある (cf. 4))。

このような平均量の導入，平均操作の採用ということは，“非局所”の立場からみると次のような操作に匹敵してくると考えられる。即ち，内部自由度としての方向特性の扱い (例えば directors-theory[3] など) で方向特性の変形場への寄与を考える場合に，変形場とは異質な物理場を想定して両端が相互作用した結果，方向性特性が派生すると考えることにすると，その相互作用を全て変形場の量として把握しょうとすれば，出現している相互作用量 (方向特性) に対して或る種の写像操作を施し，変形場に射影していかねばならない。それは directors-theory などでの non-holonomic frames への射影に他ならず，その操作が全ての平均化操作をも含んでいるものとみなせば，上述来の平均化の考え方がこの操作によって代表されるといえる。それは正に，離散系から連続系へ移行するための幾何学的手法に他ならない。

そこで次にモデルの問題について。流体と粒子の相互作用を考慮に入れる場合，最も簡

単には剛体球モデルが古くから考えられてきていることは周知のとおりである（cf. 1），5），6））。ところが，例えば高分子溶液の示す“異常現象”の解析に当っては，高分子の孤立鎖をそういう簡単なモデルで扱うと収まりがつかなくなり，種々の形状因子やその他の物理的パラメータを導入して，所謂，flexibleな粒子のイメージを前面に押し出さねばならなくなってきている（cf. 9），7））。しかしながら，このflexibleな粒子に対しては新しく導入されるパラメータは，連続体力的にみれば化学的，化学物理的な側面を代表した状態変数とみなされるので，上述来の粒体のcontinuum approachでの分布函数と同じ意味・内容をもってくるのである。

そういう側面がclose-upされた粒体の連続体力学も極く最近ようやく試みられるようになり，例えば文献8）ではporous-adsorbent materialが考えられている。そこでは上述の平均化パラメータとしては粒体粒子に吸着・吸収されたgasのspecific gas content functionが採用されており，通常の連続体力学体系での諸状態変数の他に，そういうパラメータが独立変数として採用されるわけである。この場合はSolid-Gas間の相互作用が問題になる。

以上述べてきたように，「粒状物質の連続体力学」に於ては，離散系から連続系への，不連続から連続への移行のための新しい内部状態変数が，諸々の物質間の相互作用の側面を代表し，それらのパラメータの導入により力学体系が一層拡張されてくる。そして我々の立場ではそういうパラメータこそが，“非局所”相互作用の実体を暴露しているものといえる。いずれにしても，我々は興味ある物質としてこのような粒状物質を考えていきたいと思っている。

補　　記

この論文でものべてきたごとく，粒状物質の連続体力学的考察において最も重要なことは， particulate approachから continuum approachへの移行，つまりは離散系から連続系への移行をどう考えていくかである。この問題は各粒子の振舞と粒子集合体の平均的振舞との関係は如何ということに帰着されるが，通常の扱いのごとく，或る種の分布函数で成る局所領域にわたってならしてしまって，その領域における平均値，あるいは密度函数になおしてしまった後のことについては，そういう分布函数が新しい内部状態変数の役割を果してくるので，連続体力学の体系がその分だけ一様に拡張された扱いになってくるので，例えば文献1) の如き扱いになってくる。

ところが一方，この問題においてもその平均化操作自体を問題にする必要が生じてくる場合にはどうするか。それは，いわば microとmacroの関係如何ということに集約されてき，分布函数自体の振舞が問題になってくるわけである。これに関しては，例えば (a) 一番目の粒子の（ミクロな）変位 $\mathbf{u}_{(a)}$ とその周りの或る局所領域の（マクロな）変位 $\mathbf{u}$ の関係を与える。

$$\mathbf{u} = \overset{(a)}{\mathbf{A}} \quad \mathbf{u}_{(a)} \qquad (\, a = 1,\ 2,\ \cdots,\ \mathrm{N}\,) \tag{1}$$

という形式において，平均化操作 $\overset{(a)}{\mathbf{A}}$ の構造及び寄与を問題にすることを意味する。

$\overset{(a)}{\mathbf{A}}$ は分布函数をかけて領域積分する操作，算術平均をとる操作（$\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{(a)=1}^{\mathrm{N}}$），スカラー函数として相似な形態を与える操作，などを代表することになる。従って，$\overset{(a)}{\mathbf{A}}$ が正にmicroとmacroの関係を与える operatorとみなされ得，離散系から連続系への移行を与える ものであることも確かである。

又，（1）式を空間座標成分によって，例えば

$$u^{\lambda} = \overset{(a)\lambda}{A_{i}} \ u^{i}_{(a)} \qquad \begin{cases} \lambda = 1,\ 2,\ 3. \\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases} \tag{2}$$

と表わせば，指標(a)自身も一種の座標の役割を果すと考えられ，この形式は正に directors - theory でのものになっていることがいえる（cf. 3)）。但し，その場合は(a)一番目の director の変位 $\mathbf{u}_{(a)} = (u^{i}_{(a)})$ と，その director が付随している点の変位 $\mathbf{u} = (u^{\lambda})$ の関係を

与えるのが $\overset{(a)}{\mathbf{A}} = (\overset{(a)}{A}{}_i^{\lambda})$ということになる。従って $\overset{(a)}{\mathbf{A}}$は位置座標の函数で，directors の inhomogeneous な変形を陽に表わすために用いられる。これにならって粒状物質の連続体力学を展開していくことも将来の課題の一つたりうると考えている。

尚，この種の指標の扱い方については，筆者は既に高分子孤立鎖の扱いにおいて，monomer の挙動を記述するために用いたことがあるので，文献9) なども併せて参照されたい。

参　考　文　献

1) M. A. Goodman & S. C. Cowin, J. Fluid Mech., 45(1971), 321.

2) 池田恵, Sci. Pap. RIPAM, 1–2(1971), 3.

3) R. A. Toupin, ARMA, 11(1962), 385.
C. Truesdell & R. A. Toupin, The Classical Field Theories. Handbuch der Physik, Vol. Ⅲ/1. Springer, 1960.

4) E. L. Aero & E. V. Kuvshinskii, Fizika Tverdogs Tela, 2(1960), 1399.
S. Ikeda, Sci. Pap. RIPAM, 1–2(1970), 78. 2–1(1971), 76.

5) D. Harrison, et al. (ed.), Proc. Symposium on Interaction Between Fluids and Particles. Inst. Chem. Engrs, 1962.
S. L. Soo, Fluid Dynamics of Multiphase Systems, Blaisdell, 1967.

6) 三輪茂雄, 粉粒体工学。朝倉書店, 1972.

7) 山本三三三, レオロジー。槇書店, 1964.

8) G. J. Creus & E. T. Onat, IJES, 10(1972), 649.

9) 池田恵, 物性研究, 12(1969), 245, 13(1970), 247.